معادلات دیفرانسیل

۱- کدامیک از تبدیلات زیر معادله $y' + p(x)y = q(x)y^{۴}$ را تبدیل به یک معادله خطی خواهد کرد؟

۱) $z = y^{۳}$ ۲) $z = y^{۲}$ ۳) $z = y^{-۳}$ ۴) $z = y^{-۲}$

۲- یک جواب خصوصی معادله $y'' + ۴y = ۳\cos ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}x\cos ۲x$ ۲) $\frac{۳}{۴}\cos ۲x$ ۳) $\frac{۳}{۲}\sin ۲x$ ۴) $\frac{۲}{۳}x\sin ۲x$

۳- فرض کنید y جواب مسئله مقدار اولیه $(۱-t^{۲})y'' - ۲ty' + ۶y = ۰, y(۰) = ۰, y'(۰) = ۱$ و Y تبدیل لاپلاس y باشد، Y در کدام معامله صدق می‌کند؟

۱) $s^{۲}Y'' + ۲sY' - (s^{۲}+۶)Y = -۱$ ۲) $(۱-s^{۲})Y'' + ۲sY' + ۶s^{۲}Y = -۱$

۳) $s^{۲}Y'' + ۲sY' + ۶s^{۲}Y = -۱$ ۴) $(۱-s^{۲})Y'' - ۲sY'(s^{۲}+۶)Y = -۱$

۴- با تغییر متغیر $Z = \frac{x^{۲}}{۲}$، معادله دیفرانسیل $xy'' + (x^{۲}-۱)y' + x^{۳}y = ۰, x > ۰$ به کدام معادله ای تبدیل می‌شود؟

۱) $۴\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}} + ۲\frac{dy}{dz} + y = ۰$ ۲) $۲\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}} - \frac{dy}{dz} + y = ۰$ ۳) $\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}} + y = ۰$ ۴) $\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}} + \frac{dy}{dz} + y = ۰$

۵- مسیر قائم (متعامد) خانواده‌های سهمی های $y = kx^{۲}$ که در آن k یک ثابت است، کدامیک از خانواده منحنی‌ها است؟

۱) $x^{۲} + y^{۲} = k$ ۲) $۲x^{۲} - y^{۲} = k$ ۳) $x^{۲} - y^{۲} = k$ ۴) $x^{۲} + ۲y^{۲} = k$

پاسخ تشریحی: علیرضا پاغستانی

پاسخ تشریحی

۱) گزینه «۳» صحیح است.

$$y' + p(x)y = q(x)y^{۴} \rightarrow y^{-۴}y' + p(x)y^{-۳} = q(x)$$

با تغییر متغیر $y^{-۳} = u$ تبدیل به معادله خطی مرتبه اول می‌شود.

۲) گزینه «۴» صحیح است.(مشابه ریاضی۸۳ - هسته‌ای آزاد۸۶ - عمران۸۸)

روش۱) از روش ذهنی می‌توان به گزینه ۴ رسید.

روش۲)

$$y_p = \frac{۱}{D^{۲}+۴}[۳\cos ۲x] = \mathrm{Re}\left[\frac{۳}{D^{۲}+۴}\left[e^{i۲x}\right]\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{۳xe^{۲ix}}{۲D}\right]_{=D=۲i}$$

$$= \frac{۳x}{۴}\left[-i[\cos ۲x + i\,\mathrm{sh}\,۲x]\right] = \frac{۳}{۴}x\sin ۲x$$

۳) گزینه «۱» صحیح است.(مشابه عمران۸۸)

$$(۱-t^{۲})y'' - ۲ty' + ۶y = ۰ \;\&\; y(۰) = ۰, y'(۰) = ۱$$

$$\Rightarrow \left[s^{۲}Y - sy(۰) - y'(۰)\right] - \left[s^{۲}Y - sy(۰) - y'(۰)\right]'' + ۲\left[sY - y(۰)\right]' + ۶Y = ۰$$

تبدیل لاپلاس $(s^{۲}Y - ۱) - (۲Y + ۲sY' + ۲sY' + s^{۲}Y'') + ۲Y + ۲sY' + ۶Y = ۰$

$$-s^{۲}Y'' - s^{۲}Y' + (s^{۲}+۶)Y - ۱ = ۰$$

$$s^{۲}Y'' + ۲sY' - (s^{۲}+۶)Y = -۱$$

۴) گزینه «۴» صحیح است.

$$۲z = x^{۲} \Rightarrow ۲dz = ۲xdx$$

$$\frac{dz}{dx} = x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\times x$$

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} = \frac{d}{dz}\left[x\frac{dy}{dz}\right]\times\frac{dz}{dx} = x^{۲}\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}} + \frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx} = x^{۲}\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}} + \frac{dy}{dz}$$

$$xy'' \rightarrow x^{۳}\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}} + x\frac{dy}{dz}$$

$$(x^{۲}-۱)y' \rightarrow x^{۳}\frac{dy}{dz} - x\frac{dy}{dz}$$

$$x^{۳}y \rightarrow x^{۳}y$$

$$xy'' + (x^{۲}-۱)y' + x^{۳}y = x^{۳}\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}} + x\frac{dy}{dz} + x^{۳}\frac{dy}{dz} - x\frac{dy}{dz} + x^{۳}y = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{d^{۲}y}{dz^{۲}} + \frac{dy}{dz} + y = ۰$$

۵) گزینه «۴» صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} y = kx^{۲} \\ y' = ۲xk \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{kx^{۲}}{۲kx} = \frac{x}{۲} \xrightarrow{y'=\frac{-۱}{y'}} -y'y = \frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲ydy = -xdx \Rightarrow y^{۲} + \frac{۱}{۲}x^{۲} = c \xrightarrow{\text{ویا}} x^{۲} + ۲y^{۲} = c$$